Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2025

PRIMER PARCIAL - 14/02/2025

Apellido y Nombre: ....

Número de Documento: .... Especialidad:......................................

TEMA 1

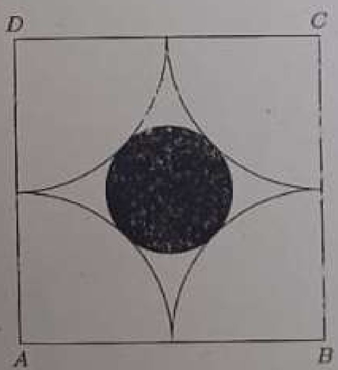
1	2	3	4	5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto.
- El examen no puede estar resuelto en lápiz.
- Todas las respuestas deben estar justificadas.

EJERCICIO 1: El polinomio $p(x) = 2x^3 + ax^2 - 4x + b$ es divisible por los polinomios $q(x) = x - 1$ y $r(x) = x + 3$. Escribir el polinomio p como producto de polinomios lineales con coeficientes enteros.

EJERCICIO 2: Sea $\mathbb{L}_1$ la recta de ecuación $5x + 3y = 15$. Sea $\mathbb{L}_2$ la recta que es perpendicular a $\mathbb{L}_1$ y pasa por el punto $(0, -2)$. Hallar el punto de intersección entre $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$.

EJERCICIO 3: Los puntos de tangencia entre el círculo sombreado y los cuatros arcos de circunferencias con centros en los vértices del cuadrado $ABCD$ están sobre las diagonales del mismo. Sabiendo que el área del círculo sombreado es igual a $\left(\frac{6}{3+2\sqrt{2}}\pi\right)\ cm^2$, calcular el área del cuadrado $ABCD$.



(resuelto por Sylvina)

EJERCICIO 4: Hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la gráfica de la función $f(x) = x^2 + kx + (3k - 4)$ corta al eje x en dos puntos diferentes.

EJERCICIO 5:

a) Calcular los valores reales de α y β para que $(-1; 4; 3)$ sea una solución del sistema

$$\begin{cases} 2x - \alpha\, y - \beta\, z &= 15 \\ -3x + \alpha\, y + 2\beta\, z &= -11 \end{cases}$$

b) Hallar todos los puntos de la recta real cuya distancia al -4 es mayor que el doble de su distancia al 1.

(resuelto por Sylvina)

UTN	1° Parcial	tema 1
	Ingreso	14-2-25

1) El polinomio $p(a) = 2x^3 + ax^2 - 4x + b$ es divisible por los polinomios $q(x) = x-1$ y $r(x) = x+3$.
Escribir el polinomio p como producto de polinomios lineales con coef. enteros

$q(x) = x-1$ y $q \mid p \rightarrow x = 1$ es raíz $\rightarrow p(1) = 0$ (I)

$r(x) = x+3$ y $r \mid p \rightarrow x = -3$ es raíz $\rightarrow p(3) = 0$ (II)

(I) $p(1) = 0 = 2 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + b \longrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 9a + b = 42 \end{cases}$

(II) $p(3) = 0 = 2(-3)^3 + a(-3)^2 - 4(-3) + b \longrightarrow$

$a = 5$
$b = -3$

$p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 5 & -4 & -3 \\
1 & & 2 & 7 & 3 \\
\hline
 & 2 & 7 & 3 & 0 \checkmark \\
-3 & & -6 & -3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & 0 \checkmark &
\end{array}$$

$\hookrightarrow s(x) = 2x + 1$

$p(x) = q(x) \cdot r(x) \cdot s(x)$

$$\boxed{p(x) = (x-1)(x+3)(2x+1)}$$

(resuelto por Sylvina)

2) Sea L_1 la recta de ecuación $5x+3y=15$.
Sea L_2 la recta que es perpendicular a L_1 y pasa por el punto $(0,-2)$
Hallar el punto de intersección entre L_1 y L_2

$L_1: 5x+3y=15 \longrightarrow 3y = 15-5x \rightarrow \boxed{y_1 = \frac{15-5x}{3}}$

$\boxed{L_1: y_1 = -\frac{5}{3}x+5}$

$L_2: y_2 = mx+b$, $L_1 \perp L_2 \rightarrow -\frac{5}{3}\cdot m=-1$

$y_2 = \frac{3}{5}x+b$ $\qquad \boxed{m=\frac{3}{5}}$

pasa por $(0,-2) \rightarrow y(0) = -2 = \frac{3}{5}(0)+b$

$b=-2$

$\boxed{L_2: y_2 = \frac{3}{5}x-2}$

$L_1 \cap L_2$

busco x / $\quad y_1 = y_2$

$-\frac{5}{3}x+5 = \frac{3}{5}x-2$

$5+2 = \frac{3}{5}x+\frac{5}{3}x$

$7 = \frac{34}{15}x$

$\frac{15 \times 7}{34} = x$

$\boxed{x=\frac{105}{34}} \longrightarrow y = \frac{3}{5}\cdot\frac{105}{34}-2$

$y = \frac{-5}{34}$

$\boxed{P = \left(\frac{105}{34}, \frac{-5}{34}\right)}$

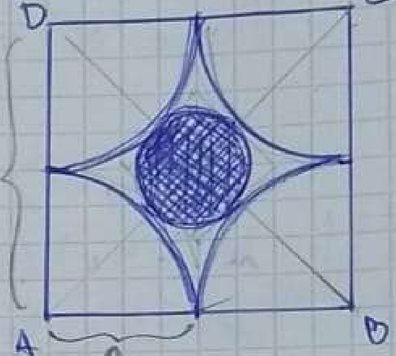
(resuelto por Sylvina)

UTN	1° parcial	Tema 1
	Ingreso	14-2-25

3) Los puntos de tangencia entre el círculo sombreado y los cuatro arcos de circunferencias con centros en los vértices del cuadrado ABCD están sobre las diagonales del mismo.

Sabiendo que el área del círculo sombreado es igual a $\left(\frac{6}{3+2\sqrt{2}}\pi\right) cm^2$

calcular el área del cuadrado ABCD



$$A_{\bullet} = \pi r^2 = \frac{6\pi}{3+2\sqrt{2}}\ cm^2$$

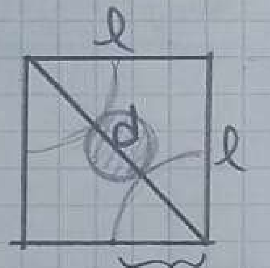
$$r^2 = \frac{6}{3+2\sqrt{2}} \cdot \frac{(3-2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})}\ cm^2 =$$

diferencia de cuadrados

$$= \frac{18-12\sqrt{2}}{\underbrace{3^2}_{9} - \underbrace{(2\sqrt{2})^2}_{8}}\ cm^2 \rightarrow r^2 = 18-12\sqrt{2}$$

$\cong 1{,}014612$

$$\rightarrow \boxed{r_1 = \sqrt{18-12\sqrt{2}}}$$



$$\boxed{d = \sqrt{2} \cdot \ell \ \text{(I)}}$$

$$d = r_2 + D_{\bullet} + r_2 \rightarrow d = \frac{\ell}{2} + 2r_1 + \frac{\ell}{2}$$

$$\boxed{\text{(II)}\ d = \ell + 2r_1}$$

$$\text{(I)} = \text{(II)}$$

$$\sqrt{2}\,\ell = \ell + 2 r_1$$

$$\sqrt{2}\,\ell - \ell = 2\sqrt{18-12\sqrt{2}}$$

$$(-1+\sqrt{2})\,\ell = 2\sqrt{18-12\sqrt{2}}$$

$$\ell = \frac{2\sqrt{18-12\sqrt{2}}}{-1+\sqrt{2}}$$

$$A_{\square} = \ell^2 = \left(\frac{2\sqrt{18-12\sqrt{2}}}{-1+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2^2 \sqrt{18-12\sqrt{2}}^{\,2}}{(-1+\sqrt{2})^2} = \frac{4\,\overset{6}{\cancel{(18-12\sqrt{2})}}}{\underset{1}{\cancel{(3-2\sqrt{2})}}}$$

$$\boxed{A_{\square} = 24\, cm^2}$$

(resuelto por Sylvina)

(4) Hallar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la gráfica de la función $f(x) = x^2 + kx + (3k-4)$ corte al eje x en dos puntos diferentes

La gráfica de f corta al eje x en 2 puntos

$\Rightarrow$ discriminante es > 0

$f(x) = x^2 + kx + (3k-4) \longrightarrow a = 1 \Rightarrow \cup$ parábola

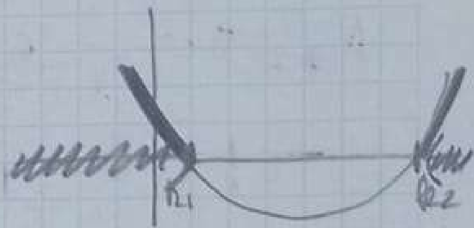
$b = k$

$c = 3k-4$

$b^2 - 4ac > 0$

$k^2 - 4 \cdot 1\,(3k-4) > 0$

$k^2 - 12k + 16 > 0$



$k^2 - 12k + 16 = 0 \longrightarrow k_1 = 6+2\sqrt{5}$

$k_2 = 6-2\sqrt{5}$

$$\boxed{S = (-\infty; 6-2\sqrt{5}) \cup (6+2\sqrt{5}; +\infty)}$$

UTN	1° parcial	tema 1
	Ingreso	14-2-25

(5) a) Calcular los valores reales de α y β para que $(-1,4,3)$ sea solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x - \alpha y - \beta z = 15 \\ -3x + \alpha y + 2\beta z = -11 \end{cases}$$

$$(-1,4,3) \to \begin{array}{l} x=-1 \\ y=4 \\ z=3 \end{array} \to \begin{cases} 2(-1) - \alpha 4 - \beta 3 = 15 \\ -3(-1) + \alpha 4 - 2\beta 3 = -11 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} -2 - 4\alpha - 3\beta = 15 \\ 3 + 4\alpha - 6\beta = -11 \end{cases} \to \underbrace{\begin{cases} -4\alpha - 3\beta = 17 \\ 4\alpha + 6\beta = -14 \end{cases}}$$

$$\boxed{\alpha = -5 \quad \beta = 1}$$

b) Hallar todos los puntos de la recta real cuya distancia al -4 es mayor que el doble de su distancia al 1

$$|x-(-4)| > 2\,|x-1|$$

$$|x+4| > |2x-2|$$

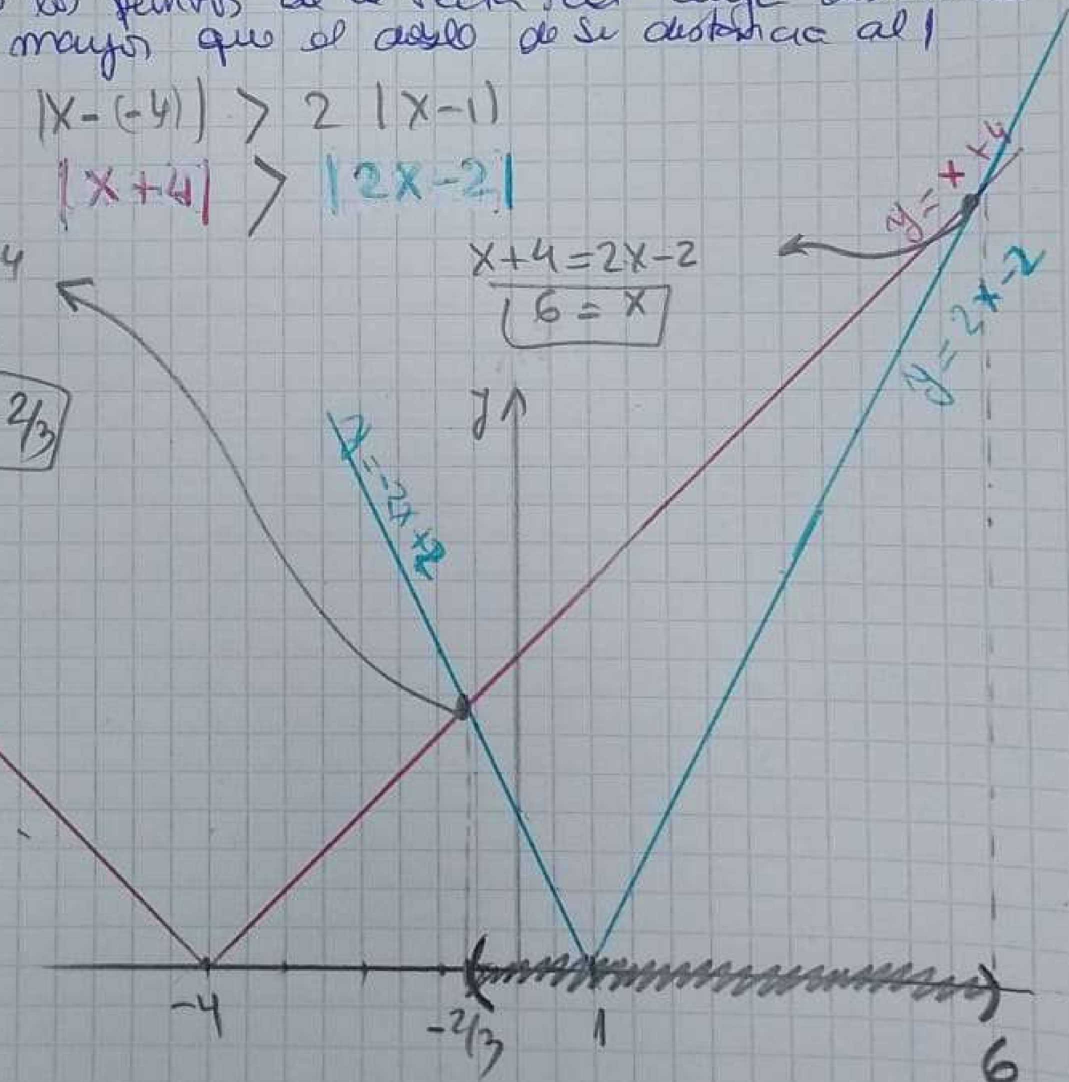
$$-2x+2 = x+4$$

$$-2 = 3x$$

$$\boxed{x = -2/3}$$

$$x+4 = 2x-2$$

$$\boxed{6 = x}$$



$$\boxed{S = \left(-\frac{2}{3}; 6\right)}$$

(resuelto por Sylvina)